Periódico Eletrônico
Fórum Ambiental
da Alta Paulista
ISSN 1980-0827
Volume 12, Número 02, 2016

Desenvolvimento de um modelo de dispersão advectiva, de natureza fuzzy, para estudar comportamento de campos de concentração em rios naturais

Development of a dispersion advectiva model, fuzzy of nature, to study concentration camps behavior in natural rios

Desarrollo de un modelo de dispersión advectiva, de la naturaleza difusa, al estudio de los campos de concentración em los ríos naturales

Sílvia Helena Lima dos Santos
Professora Doutora, UNILAB, Brasil.
silvia.santos@unilab.edu.br

Ticiana Fontoura Vidal
Doutoranda em Recursos Hídricos, UFC, Brasil.
ticianafvidal@yahoo.com.br

Ada Amélia Sanders Lopes
Professora Doutora, UNILAB, Brasil.
ada@unilabi.edu.br

Periódico Eletrônico
Fórum Ambiental
da Alta Paulista
ISSN 1980-0827
Volume 12, Número 02, 2016

RESUMO

Este trabalho desenvolveu uma metodologia, com base na aplicação da teoria *fuzzy*, para estudar campos de concentração de substancias poluentes em rios naturais. Para isso, as equações diferenciais do modelo de transporte são transformadas em equações diferenciais *fuzzys*, de modo que o campo de concentrações representado pelo modelo matemático seja transformado em campos de funções de pertinências de concentrações. Para a solução do modelo matemático foi usado o método das diferenças finitas, com esquema implícito para o equacionamento das equações das diferenças. Para a realização das simulações foi desenvolvido um programa computacional, em linguagem FORTRAN que deu suporte na obtenção dos resultados para os mais diversos cenários propostos. Os resultados mostraram que a teoria *fuzzy* pode se tornar uma alternativa segura no auxilio do controle de poluição dos rios em geral, fornecendo, assim, fundamentos para a gestão dos recursos hídricos.

PALAVRAS-CHAVE: Teoria fuzzy. Modelo matemático. Gestão de recursos hídricos.

ABSTRACT

This research developed a methodology, based on application of fuzzy theory in the pollutant transport models, to study pululantes concentration fields in natural Rivers. In such way, the differential equations of the transport model are transformed into fuzzy differential equations, so that, the field of concentrations, represented by the mathematical model is transformed into fields of concentration membership functions. The study makes use of parameters defined in the law to establish the class of the river, so that, it calculates, for each type of release, the risk and its assimilative capacity of the river to receive effluents. For the solution of the mathematical model the finite difference method was used, with implicit scheme on order to get the difference equation. For the accomplishment of the simulations a computational program, in FORTRAN language, was developed, that gave support in the obtaining of the results for the most several proposed sceneries. The results have shown that the *fuzzy* theory can become a safe alternative to help control pollution of rivers in general, providing, in such way, subsidies for resources management.

KEYWORDS: Fuzzy theory. Mathematical model. Management of water resources.

RESUMEN

En este trabajo se desarrolló una metodología, basada en la aplicación de la teoría difusa para estudiar sustancias contaminantes campos de concentración en los ríos naturales. Para esto, las ecuaciones del modelo de transporte diferencial se transforman en ecuaciones diferenciales Fuzzys, de modo que la concentración de campo representado por el modelo matemático se transforma en funciones de pertenencia campos de concentraciones. Para la solución del modelo matemático se utilizó el método de diferencias finitas con el esquema implícito para la solución de las ecuaciones de diferencias. Para realizar las simulaciones se ha desarrollado un programa de ordenador en el lenguaje FORTRAN que apoya el logro de resultados para diferentes escenarios propuestos. Los resultados mostraron que la teoría difusa puede convertirse en una alternativa segura a beneficio de la lucha contra la contaminación de los ríos en general, proporcionando así motivos para la gestión de los recursos hídricos.

PALABRAS CLAVE: La teoría difusa. Modelo matemático. La gestión de los recursos hídricos.

1. INTRODUÇÃO

Dentre as importantes teorias disponíveis para se quantificar riscos podem-se destacar a teoria probabilística e a teoria fuzzy. A primeira, que é bem conhecida no meio cientifico, é a que trata da aplicação da teoria das probabilidades nos modelos determinísticos. Esta metodologia, bem desenvolvida nos dias presentes, necessita para um completo sucesso de sua aplicação, um banco de dados consistente. Com isso, em regiões em que não há uma tradição em bancos de dados históricos, o sucesso desta metodologia fica comprometido.

Outra metodologia que está começando a ser usada nos estudos das incertezas e na análise de risco em recursos hídricos é a teoria fuzzy. Esta teoria, desenvolvida nos anos 60, vem se tornando uma ferramenta útil para a análise desta classe de problema, por não depender de um banco de dados tão completo.

A grande dificuldade, com relação à aplicação da teoria fuzzy nos problemas ambientais reside no fato de que as equações diferenciais que governam os processos de transporte da massa de poluentes precisam ser "fuzzificadas". Isto quer dizer, em outras palavras, que essas equações diferenciais têm que ser transformadas em novas equações diferenciais com características "fuzzy". Evidentemente que esta transformação ainda se encontra em fase de desenvolvimento em sua estrutura matemática.

Este trabalho desenvolveu uma metodologia que combinou a teoria fuzzy com os processos de transporte de poluentes, para estudar o comportamento de perfis de concentração de substâncias poluentes na forma de funções de pertinentes, provenientes de lançamentos de efluentes. O estudo prevê o desenvolvimento de um programa computacional que permita a solução numérica da equação diferencial fuzzy de transporte de massa e, assim, permita que se desenvolvam algumas simulações para os mais diversos cenários de lançamentos.

2. METODOLOGIA

Neste trabalho isto será alcançado mediante a *fuzzificação* da equação diferencial de transporte difusivo advectivo. Deste modo, o que se buscará neste trabalho é desenvolver um estudo que permita conhecer melhor as equações diferenciais *fuzzy*, notadamente a equação da difusão advectiva *fuzzificada*.

2.1 FORMULAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO

A solução do modelo matemático proposto, em uma forma *fuzzy*, representa um grande desafio. Como se sabe, a equação da difusão advectiva é uma equação diferencial parcial, cuja solução analítica só é possível para condições de contorno e condições iniciais simples. Para os casos mais comuns presentes no meio ambiente, há a necessidade de uma solução numérica, nos processos de solução do modelo.

De qualquer maneira, este modelo terá que ser resolvido para que haja sucesso na avaliação do risco e da confiabilidade ambiental neste corpo hídrico.

A formulação do modelo matemático consiste em tomar como base um volume de controle, e combinar as teorias acima citadas, de modo que seja possível se chegar à equação geral da difusão advectiva, definida pela equação diferencial abaixo:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial x}(AE\frac{\partial C}{\partial x}) \pm KC + S_D \qquad (1)$$

Onde os termos são representados por:

C : concentração média em cada seção: $[ML^{-3}]$;
U : velocidade média em cada seção do rio: $[LT^{-1}]$;
A : área da seção transversal: $[L^2]$;
E : coeficiente de dispersão longitudinal: $[L^2T^{-1}]$;
KC : coeficiente de decaimento da substância: [T^{-1}];
S_D : lançamento de cargas difusas ao longo do canal: $[ML^{-3}/L]$.

As condições de contorno são:

$$C(0,t)=C(t) \qquad (2)$$

$$\frac{\partial C}{\partial x}(L,t) = 0 \qquad (3)$$

As condições iniciais são:

$$C(x,0)=C(x) \qquad (4)$$

Esse conjunto de equações precisam ser fuzzificadas. Isto se faz transformando os parâmetros de entrada da equação (1) em funções de pertinências, onde todos os parâmetros se transformam em um conjunto de números com diferentes graus de pertinências, como foi definido previamente.

A lógica fuzzy ou nebulosa é baseada no uso de aproximações, ao contrário da exatidão, com que se está naturalmente acostumado a trabalhar. O princípio fundamental da teoria *fuzzy*, princípio da dualidade, estabelece que dois eventos opostos possam coexistir, isto é, um elemento pode pertencer, com certo grau, a um conjunto e, em um outro grau, a um outro conjunto (LIMA,2002). Nota-se isso em vários casos na natureza e na vida cotidiana,

Periódico Eletrônico
Fórum Ambiental da Alta Paulista
ISSN 1980-0827
Volume 12, Número 02, 2016

principalmente quando se tratam de conceitos abstratos. Por exemplo, uma pessoa pode achar que está calor, enquanto outra, no mesmo ambiente, acha que está frio.

De acordo com Ganoulis *et al.,* (1994), o conceito central da teoria dos números *fuzzy* baseia-se na existência de uma função de pertinência para representar numericamente o grau através do qual determinado elemento pertence a um conjunto. Assim, conforme Zadeh (1965), um conjunto *fuzzy* é caracterizado por uma função de pertinência que irá mapear os elementos de um determinado domínio para um número real pertencente ao intervalo [0,1].

Normalmente, uma função de pertinência está na forma $\tilde{A}: X \rightarrow [0,1]$. Assim sendo, qualquer função assim representada pode ser associada a um conjunto *fuzzy*, dependendo dos conceitos e das propriedades que se deseja representar, considerando-se, ainda, o contexto no qual o conjunto está inserido. Um conjunto *fuzzy* é um conjunto de pares ordenados onde o primeiro elemento é $x \in X$ e o segundo é a função de pertinência $\mu_{\tilde{A}}(x)$ que mapeia x no intervalo [0,1]. Assim, a representação de um conjunto *fuzzy* é matematicamente definida por:

$$\tilde{A} = \left\{ \left(x, \mu_{\hat{A}}(x) \right) x \in X; \mu_{\hat{A}}(x) \in \left[0,1 \right] \right\} \tag{5}$$

Onde:

$\mu_{\hat{A}}(x)$ é o grau de pertinência de x no conjunto $\tilde{A}$

Aplicando a teoria *fuzzy* na Equação (1), a mesma pode ser “fuzzificada” e transformada na seguinte formulação.

$$\frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} + \tilde{u} \quad \partial x \quad \left(\quad \partial x \right) \tag{6}$$

Onde:

$\tilde{A}$: função de pertinência para a área transversal;

$\tilde{C}$: função de pertinência para a concentração;

$\tilde{u}$: função de pertinência para o campo de velocidade longitudinal;

$\tilde{L}$: função de pertinência para o coeficiente de dispersão longitudinal;

$\tilde{K}$: função de pertinência para o decaimento;

$\tilde{C}_D$: função de pertinência para o lançamento difuso.

A Equação (6) precisa ser resolvida para se obter o campo de concentração, em sua forma de funções de pertinências que permitiram a determinação do risco e da garantia em todos os pontos do domínio definido no estudo e em todos os intervalos de tempo considerados.

Periódico Eletrônico
Fórum Ambiental
da Alta Paulista
ISSN 1980-0827
Volume 12, Número 02, 2016

De acordo com Ganoulis (1991), se um evento, ou realização de um processo, é descrito por meio da lógica *fuzzy*, então a confiabilidade deste evento pode ser calculada como um número *fuzzy*. Considera-se que o sistema tem uma resistência $\tilde{R}$ e uma carga $\tilde{L}$, ambas representadas por números *fuzzy*. Uma medida de confiabilidade, ou uma margem de segurança que também caracteriza o desempenho do sistema, pode ser definida pela diferença entre a carga e a resistência. Esta diferença também é um número *fuzzy*, dado por:

$$\tilde{M} = \tilde{R} - \tilde{L} \qquad (7)$$

Tem-se para cada função um intervalo de nível h:

$$\tilde{M}(h) = \tilde{R}(h) - \tilde{L}(h) \qquad (8)$$

Onde:

$$\tilde{R}(h) = \left[\tilde{R}_1(h), \tilde{R}_2(h)\right] \qquad (9)$$

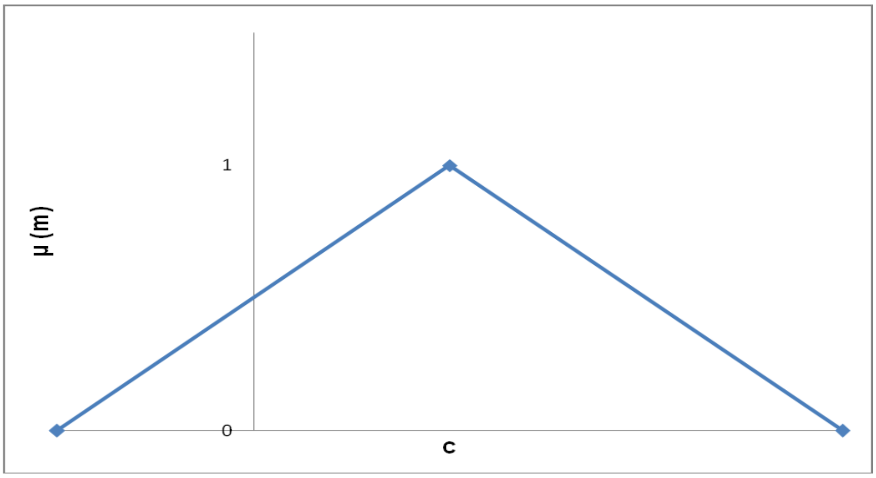
$$\tilde{L}(h) = \left[\tilde{L}_1(h), \tilde{L}_2(h)\right] \qquad (10)$$

A medida marginal de segurança $\tilde{M}$ tem as possíveis condições:

Falha: $\tilde{M}(h) < 0$

Confiabilidade: $\tilde{M}(h) \geq 0$

Figura 1: Representação de uma função de pertinência para a função marginal de segurança.



ISSN 1980-0827
Volume 12, Número 02, 2016

2.2 ESQUEMA NUMÉRICO PARA A SOLUÇÃO DO MODELO DE TRANSPORTE

Considerando que a equação da difusão advectiva, na sua forma *fuzzy* não tem solução analítica simples, optou-se por um método numérico para sua solução. Assim, tendo em vista a sua simplicidade, o esquema numérico baseado no Método das Diferenças Finitas foi utilizado para resolver a equação de transporte. Para este trabalho, utilizou-se o esquema semi-implícito de Crank-Nicolson, que garante estabilidade numérica no processo de solução (ANDERSON *et al*., 1984).

Aplicando o esquema implícito na equação (6) e fazendo as devidas simplificações tem-se:

$$\tilde{A}(\alpha)\tilde{C}_{i-1}(\alpha)+\tilde{B}(\alpha)\tilde{C}_{i}(\alpha)+\tilde{D}(\alpha)\tilde{C}_{i+1}(\alpha)=\tilde{I}_{i}(\alpha) \qquad (11)$$

Onde: A, B, D são os coeficientes "fuzzys" da matriz [M], $\tilde{I}_i$ é o vetor com todas as informações conhecidas, e $\tilde{C}(\alpha)$ é o vetor solução do modelo para cada ponto do domínio e para cada tempo considerado.

De forma mais compacta tem-se:

$$[\tilde{M}(\alpha)]\left[\tilde{C}(\alpha)\right]=\left[\tilde{I}(\alpha)\right] \qquad (12)$$

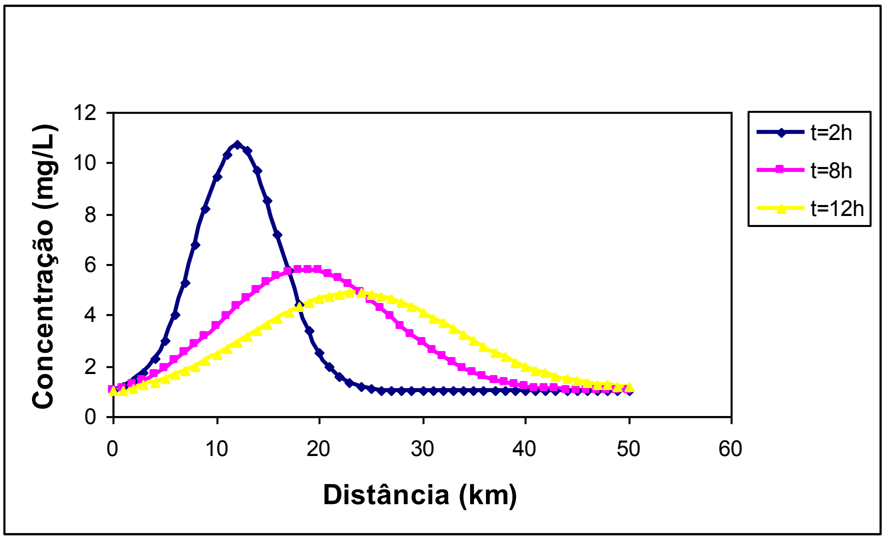
Onde: α é o nível de pertinência considerado.

A solução da equação matricial *fuzzy*, Equação (12), fornece os valores das concentrações em forma de funções de pertinência.

3. RESULTADOS

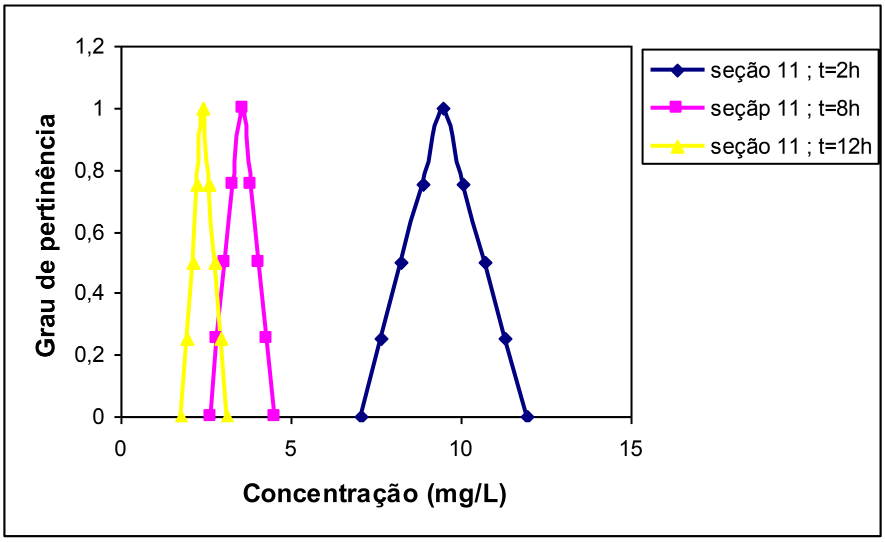
Após o desenvolvimento do programa computacional, onde foram estruturadas várias sub-rotinas, dispostas sequencialmente com vistas a obtenção de alguns resultados, um conjunto de simulações foi realizada. Inicialmente, foi considerado um rio com declividade, na sua forma fuzzy, definida por [0,0000375; 0,00005; 0,0000625], coeficiente de rugosidade de Manning, também em sua forma fuzzy, definida por [0,0375; 0,05; 0,0675], largura do canal de 20 metros e vazão de 20 metros cúbicos por segundo. A concentração inicial do poluente foi considerado de 1 mg/L. Nesta primeira simulação foi considerado um lançamento instantâneo de 100mg/L, e uma substância conservativa, com derramamento em uma seção 10 Km da origem. O objetivo desta simulação é, apenas, para verificar o comportamento do programa computacional com relação a uma situação conhecida na literatura, onde a solução analítica pode ser comprovada.

Figura 2: Comportamento da concentração com a distância em tempos diferentes.



A Figura 2 mostra os resultados desta simulação para os tempos de 2 horas, 8 horas, e 12 horas, considerando a concentração de maior grau de pertinência. Pela figura, podem-se ver os efeitos combinados da dispersão, fazendo com que haja um espalhamento na nuvem poluente, e advecção, onde há uma translação do centro de gravidade da nuvem poluente, causada pelo movimento das águas do rio em questão.

Figura 3: Comportamento das funções de pertinência para as concentrações em tempos diferentes, seção 11.

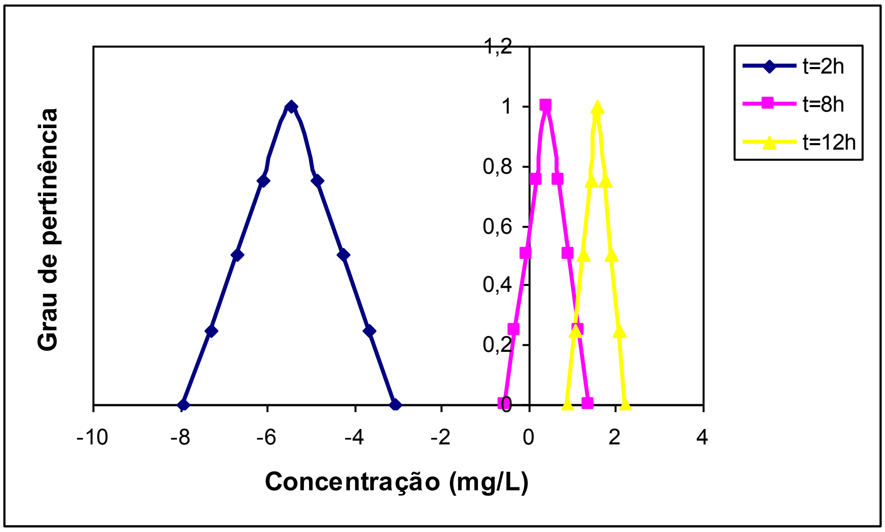


A Figura 3 mostra os resultados obtidos para as funções de pertinências das concentrações em uma seção 10 km da origem. Como podem ser observadas, essas funções se deslocam de

Periódico Eletrônico
Fórum Ambiental
da Alta Paulista
ISSN 1980-0827
Volume 12, Número 02, 2016

acordo com a passagem da nuvem poluente em cada seção e para diferentes tempos. Por exemplo, para um tempo de 2 horas, pode-se ver que a função tem sua concentração com maior grau de pertinência próximo de 10mg/L. Entretanto, na mesma seção, em 8 horas, o valor de maior grau de pertinência ocorre para um valor próximo de 4 mg/L. Já para um tempo de 12 horas, a concentração com maior grau de pertinência é, aproximadamente, igual 2,1 mg/L. Este resultado é muito importante pois mostra a dinâmica concentração da nuvem poluente, no processo de diluição do rio.

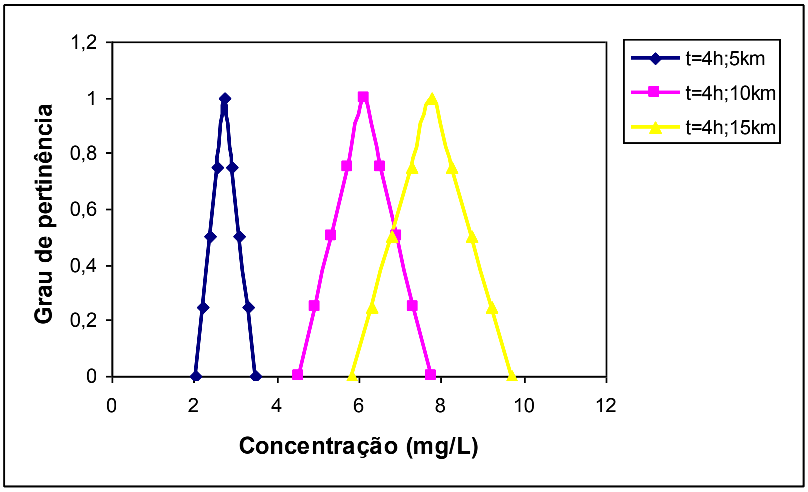
Figura 4: *Comportamento da função marginal de segurança para as concentrações em tempos diferentes, em uma seção 10 km da origem*.



A Figura 4 mostra o comportamento da função marginal de segurança, calculada nos tempo de 2 horas, 8 horas e 12 horas, na seção 10 km da origem. Como pode ser observada, considerando a metodologia proposta, esta função é a responsável pelo cálculo do risco de falha em um sistema que recebe concessão de outorga para lançamento de efluentes. Neste caso, os resultados mostram que, para a seção considerada, o risco deve ser maior para o tempo de 2 horas, considerando que, neste tempo, a função de marginal de segurança se encontra mais para a esquerda do eixo de concentração. Assim, os resultados mostram que esta função se movimenta de acordo com a intensidade das concentrações de poluentes presentes ao longo do rio, fazendo com que o risco aumente ou diminua, tanto com o tempo, como no espaço.

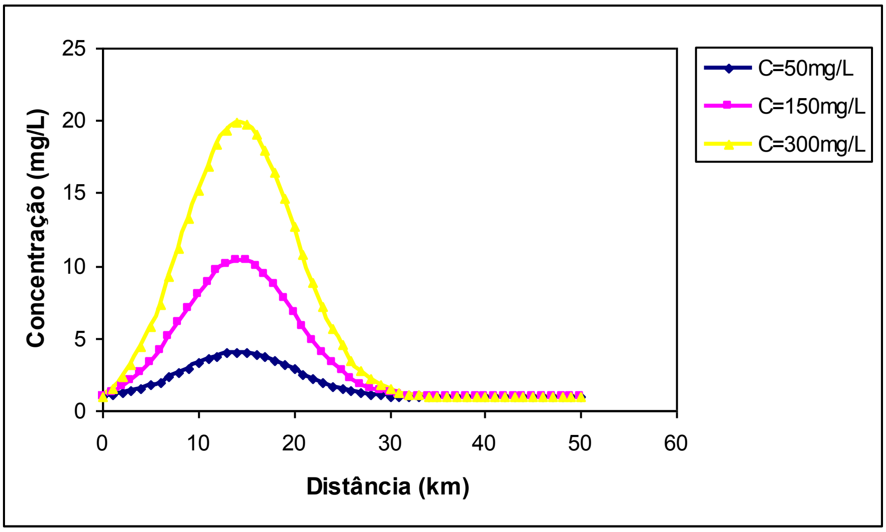
Periódico Eletrônico
Fórum Ambiental
da Alta Paulista
ISSN 1980-0827
Volume 12, Número 02, 2016

Figura 5: *Comportamento das funções de pertinência para as concentrações no tempo de 4 horas, em diferentes seções.*



A Figura 5 mostra as funções de pertinências da concentração, em diferentes seções, para um tempo de 4 horas. O objetivo é ver como o campo de concentração pode ser controlado ao longo do rio. Os resultados mostram que para este tempo, os números *fuzzys* para a concentração se encontravam nos intervalos [2; 3,5], aproximadamente, na seção 5 km, [4,2; 8], na seção 10 km e [6; 10] na seção 15 km. Isto implica dizer que, a figura mostra que, neste tempo considerado, a nuvem poluente encontra-se passando pela seção de 15 km e deixando a seção de 5 km. Este resultado está de acordo com o perfil de concentração apresentado na Figura 2.

Figura 6 – *Perfil de concentração em 4horas para diferentes lançamentos.*



A Figura 6 mostra os perfis de concentração, com maior grau de pertinência, para diferentes lançamentos, tomados em um tempo de 4 horas. Como pode ser observado, para um lançamento de 300mg/L de DBO, o pico de concentração é muito alto, o que faz com que o risco de falha do sistema seja máximo. Outro fato importante é que os picos ocorrem na mesma seção, fato este que mostra que diferentes lançamentos não induzem em diferente comportamento advectivo para as nuvens poluentes. Este resultado está de acordo com a equação geral da difusão advectiva que mostra que a translação da nuvem poluente independe de sua intensidade.

4. CONCLUSÕES

Após a aplicação do modelo proposto em um rio natural sujeito a lançamentos de efluentes, uma análise foi realizada com vistas entender o comportamento dos campos de concentração de substâncias poluente ao longo do rio. A aplicação da formulação fuzzy na Equação de Balanço de Massa mostrou-se eficiente no cálculo das funções de pertinência para o campo de concentração e podem representar medidas de controle para o sistema hídrico em questão.
Esta aplicação permite transformar esses modelos em equações diferenciais *fuzzys* e, quando tratado adequadamente, permite que se obtenham Funções de Pertinências para as variáveis de controle. No caso do estudo em questão, a variável de controle é a concentração do poluente que é lançado em um corpo hídrico. Desta forma, a metodologia proposta permite que se determinem campos de concentração, em sua forma *fuzzy*, que permite que se desenvolvam métodos de cálculo dos campos de risco e de garantia, em toda a extensão do corpo hídrico.
Os resultados mostraram ainda a capacidade de programa computacional na solução da equação diferencial fuzzy para o modelo advectvo e mostrar a dinâmica da função marginal de segurança ao longo do trecho do rio, para diferentes tempos. Estes resultados mostram que o Programa Computacional desenvolvido para este pesquisa é capaz incorporar sub-rotinas para o cálculo dos campos de risco e de confiabilidade, para diferentes lançamentos, e, com isso, subsidiar Gestores dos Recursos Hídricos nos programas de Gestão dos Recursos Hídricos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDERSON, D. A.; TANNEHILL, J. C.; PLETCHER, R. H. Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. Hemisphere Publishing Corporation, 1984.

GANOULIS, J.G. *Engineering risk analysis of water pollution: Probabilities and fuzzy, set,* VCH Publishers Inc, Weinheim, New York; Basel, Cambridge, Tokyo, 1994.

GANOULIS, J.; DUCKSTEIN, L.; BOGARDI, I. *Risk Analysis of Water Quantity and Quality Problems: The Engineering Approach.* In: Ganoulis (Ed.), Water Resources Engineering Risk Assessment, Nato ASI Series, Serie G: Ecological Sciences, v. 29, 1991.

LIMA, O. S. J. *Análise de pontos por função fuzzy*. 2002. 166f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Software) – Universidade de Fortaleza, Fortaleza, 2002.

ZADEH, L. A., *Fuzzy Sets – Information and Control*, vol. 8 (338-353), 1965.