

Otimização de Custos com Consideração de Probabilidade de Falha em Vigas de Concreto Armado Sob Flexão

Luccas André Felix Silva

Engenheiro Civil, Mestrando, UFPE, Brasil.
lucas.fsilva@ufpe.br

Paulo Fernando Silva Sousa

Professor Doutor, UPE, Brasil.
pfss@poli.br

Silvana Maria Bastos Afonso da Silva

Professora Doutora, UFPE, Brasil.
silvana.bastos@ufpe.br

Renato de Siqueira Motta

Professor Doutor, UFPE, Brasil.
renato.motta@ufpe.br

Bernardo Horowitz

Professor Doutor, UFPE, Brasil.
bernardo.horowitz@ufpe.br

Recebido: 05 de junho de 2024

Aceito: 15 de julho de 2024

Publicado online: 8 de agosto de 2024

RESUMO

O trabalho busca demonstrar a viabilidade e pertinência da aplicação conjunta de métodos de otimização estrutural com restrições de probabilidade de falha, integrando a busca pela solução ótima e a garantia de segurança das estruturas. A metodologia empregou métodos de otimização, como os sequenciais quadráticos (SQP), *interior-point* e *active-set*, juntamente ao método de cálculo de probabilidade de falha FORM. Ferramentas computacionais, como o MATLAB, permitiram uma análise comparativa do desempenho desses métodos. O estudo se destaca por integrar otimização estrutural e confiabilidade, aplicando-se em vigas de concreto armado, uma temática relevante para a engenharia estrutural. Os resultados da análise de vigas biapoiadas mostraram uma convergência satisfatória entre os métodos, com mínima variabilidade e desempenho superior dos otimizadores SQP e *interior-point*. A introdução de coeficientes de segurança normatizados resultou em aumento na taxa de armadura, reduzindo a probabilidade de falha e os custos. O estudo evidenciou a sinergia entre otimização e segurança estrutural, contribuindo teoricamente ao mostrar a eficácia da combinação de otimização com restrições de probabilidade de falha, e metodologicamente, ao avaliar comparativamente diferentes métodos de otimização.

PALAVRAS-CHAVE: Otimização. Probabilidade de falha. Vigas de concreto armado.

1 INTRODUÇÃO

O engenheiro estrutural, ao realizar um projeto, deve sempre buscar resultados que atendam a economia e a segurança da estrutura. No âmbito da busca por economia, os métodos de otimização são bastante relevantes, em que é possível minimizar a função custo (função objetivo) sujeita a restrições, que estão prescritas em normas de projeto. A literatura e as bibliotecas das linguagens de programação, como MATLAB (que será utilizado neste trabalho), são bem consolidadas na aplicação desses métodos em estruturas, facilitando sua utilização e análise.

Quando se busca segurança, os métodos de confiabilidade apresentam grande utilidade, já as grandezas envolvidas apresentam incertezas de medições, conduzindo a modelagens estatísticas que demonstram possíveis variabilidades, incertezas estas que surgem principalmente na produção do concreto e execução do projeto. A própria norma brasileira reconhece tais incertezas, tanto que estabelece coeficientes de segurança que devem ser aplicados nos cálculos para garantir uma maior segurança no processo.

Motta e Afonso (2016) apresentam uma análise da aplicação dos métodos de otimização vinculados à análise de confiabilidade em análises de treliças espaciais, que apresentam robusta geometria na sua modelagem e resultados satisfatórios. Motta et al (2021) também aplicam os métodos de análise de confiabilidade aplicados em análise de dutos corroídos, que são problemas com expressivas incertezas e não-linearidades no processo. Métodos de otimização também costumam ser amplamente utilizados em mecânica dos fluidos, como fez Horowitz (2013) para a análise de operação de reservatórios de petróleo.

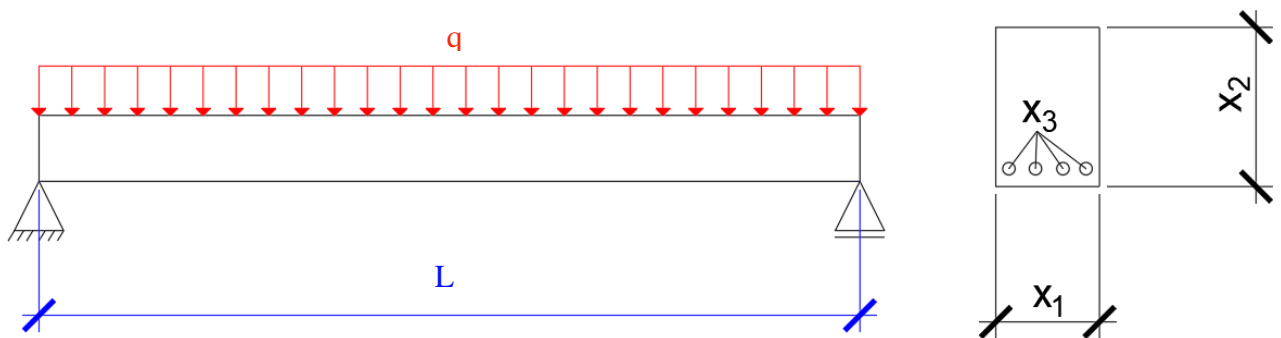
Este trabalho propõe realizar a otimização do custo de uma viga biapoiada submetida a esforços de flexão, de forma que entre as restrições deste processo está o cálculo de probabilidade de falha (obtido pelos métodos de confiabilidade). Em resumo, o objetivo é realizar a redução dos custos tendo a segurança como uma de suas restrições. Com isso, realizar um comparativo entre os métodos aplicados e discussões a partir desses resultados. No caso de estruturas de concreto armado, os modelos de cálculo, procedimentos e restrições são estabelecidos conforme a norma ABNT NBR 6118:2023, portanto sendo base para este trabalho.

2 METODOLOGIA

O problema a ser resolvido é a otimização do custo (concreto, forma e aço) de uma viga biapoiada, com um carregamento constante (q) distribuído ao longo de seu vão (L). Sendo assim, como apresentado na Figura 1, as variáveis de projeto são as dimensões da seção transversal: largura (x_1), altura (x_2) e a área de aço (x_3).

A partir do Sistema Nacional de Pesquisa de Custos e Índices da Construção Civil (SINAPI), podemos construir a função custo a ser otimizada, portanto denominada de função objetivo. As composições utilizadas e suas unidades de medida estão descritas na Tabela 1, tendo sido tomados os valores dos custos do estado de Pernambuco referentes ao mês de março de 2024. Assim, é possível facilmente obter a função objetivo, como apresentado na Equação 1, em que ρ é o peso específico do aço.

Figura 1 – Viga biapoiada



Fonte: Os autores, 2023.

A partir do Sistema Nacional de Pesquisa de Custos e Índices da Construção Civil (SINAPI), podemos construir a função custo a ser otimizada, portanto denominada de função objetivo. As composições utilizadas e suas unidades de medida estão descritas na Tabela 1, tendo sido tomados os valores dos custos do estado de Pernambuco no mês de março de 2024. Assim, é possível obter facilmente a função objetivo, como apresentado na Equação 1, em que ρ é o peso específico do aço.

Tabela 1 – Custos unitários

Código	Descrição	Unidade	Custo (R\$)
96557	Concretagem	M3	654,30
96530	Montagem de forma	M2	156,96
104920	Armação	KG	11,91

Fonte: SINAPI, 2024.

$$custo = custo_{concreto} * x_1 x_2 L + custo_{forma} * (x_1 L + 2x_2 L) + custo_{aço} * x_3 L \rho \quad \text{Eq. 1}$$

Neste problema, serão tratadas a flexão e a flecha máxima da viga. A flexão ocorre quando dois momentos fletores iguais e opostos atuam no mesmo plano longitudinal (BEER et al, 2015), como resultado há a formação de duas regiões de tensões na seção transversal: tração e compressão normal. O concreto apresenta alta resistência à compressão, por outro lado, suas

características de fragilidade e baixa resistência à tração restringem seu uso isolado. Para contornar essas limitações, o aço é empregado em conjunto com o concreto, convenientemente posicionado na peça de modo a resistir aos esforços de tração (BASTOS, 2019).

A flecha máxima é a deformação principal que ocorre na linha elástica, que é o diagrama de deflexão do eixo longitudinal que passa pelo centroide de cada área da seção transversal da viga (HIBBELER, 2010). Portanto, os conceitos de flexão e deflexão estão interligados e apresentam restrições normativas importantes a serem tratadas.

Por considerar os esforços de flexão, o processo de otimização requer o equilíbrio do momento resistivo, em que f_{yk} é a tensão de escoamento característica do aço, f_{ck} do concreto e c o cobrimento da seção transversal (Equação 2), em relação ao momento solicitante (Equação 3), em que o momento resistivo representa a capacidade da seção de suportar a flexão, enquanto o momento solicitante é o esforço presente na estrutura em análise. Vale destacar que esse equilíbrio é alcançado considerando coeficientes de segurança estabelecidos na norma do item 12.4.1, entretanto, as equações apresentadas consideram esse equilíbrio com base nas variáveis do problema.

$$M_R = f_{yk}x_3 \left(x_2 - c - \frac{0,588f_{yk}A_s}{x_1f_{ck}} \right) \quad \text{Eq. 2}$$

$$M_S = \frac{qL^2}{8} \quad \text{Eq. 3}$$

É a partir do equilíbrio entre esses momentos que se obtém a armadura necessária para suportar os esforços de tração. A ABNT NBR 6118:2023, em seus itens 17.3.5.2.1 e 17.3.5.2.4, estabelece, respectivamente, restrições para a armadura mínima (Equação 4), em que até um f_{ck} de 30 Mpa, o fator ρ_{min} é de 0,15%, e máxima (Equação 5), a serem acrescentadas na seção, portanto sendo consideradas no processo de otimização.

$$A_{min} = \rho_{min}x_1x_2 \quad \text{Eq. 4}$$

$$A_{max} = 0,04x_1x_2 \quad \text{Eq. 5}$$

As restrições de momento fletor e taxa de armadura acima são claramente não-lineares, já que dependem das próprias variáveis do processo de otimização. Adicionalmente, também foram consideradas restrições lineares, como a restrição da largura da viga presente no item 13.2.2 da norma, bem como restrições de altura (mínimo 30 cm) e taxa de armadura (mínimo de 1 cm²), sendo as duas últimas adotadas devido a questões práticas construtivas, logo sem exigência normativa.

Finalizando as restrições, temos a equação de deflexão para as condições do problema tratado (Equação 6), em que E é o módulo de elasticidade, obtido a partir da resolução da equação diferencial da linha elástica (BEER et al, 2015). O item 13.3 da NBR 6118:2023 limita a deformação em $L/500$ e 10 mm para o caso de vigas que suportam paredes, além do limite de rotação de 0,0017 rad, em que essa rotação se faz presente em apoios simples, que é o caso tratado. A obtenção dessa rotação se dá também a partir da linha elástica (Equação 7), sendo a primeira derivada da equação da linha elástica.

$$y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{5}{32} \frac{qL^4}{Ex_1x_2^3} \quad \text{Eq. 6}$$

$$\frac{dy}{dx}(0, L) = \frac{1}{2} \frac{qL^3}{E x_1 x_2^3}$$

A linguagem MATLAB é uma opção para a resolução de problemas de otimização, por incluir a biblioteca *Optimization Toolbox* com funções para encontrar parâmetros que minimizam ou maximizam funções objetivo, enquanto satisfaz as restrições (Mathworks, 2024). Para a tratativa de problemas não-lineares, a biblioteca disponibiliza a função *fmincon*, que encontra o mínimo de problemas com restrições não-lineares com diferentes variáveis (Mathworks, 2024), portanto satisfazendo o problema em questão.

Dentro da função *fmincon*, é possível escolher o algoritmo que será utilizado para a resolução do problema, portanto, é válido realizar um comparativo entre estes. Para isso, foram escolhidos os algoritmos “*interior-point*” (padrão da função), “*sqp*” e *active-set*, que são métodos conhecidos na literatura de otimização, e realizada a plotagem das iterações dos métodos, possibilitando estabelecer seguras conclusões.

As variáveis já apresentadas nas equações já descritas apresentam variabilidade devido a incertezas no seu processo de obtenção. Essas incertezas podem estar relacionadas a erros de medição, fenômenos naturais, erros de manufatura, entre outros (BECK, 2008). Logo, para um mais alto nível certeza dos resultados, é importante considerar tais variabilidades, um estudo feito a partir dos conceitos estabelecidos pela confiabilidade estrutural.

Essas variáveis acompanhadas de incertezas são denominadas variáveis aleatórias e carregam informações estatísticas que são obtidas experimentalmente. As informações são, principalmente, o coeficiente de variação e o tipo de distribuição de probabilidade (normal, lognormal etc.). Tais informações permitem calcular a probabilidade de falha, que é a probabilidade (subjéitiva) de que o sistema falhe, não atendendo às especificações de projeto (BECK, 2008).

Há diversos métodos para o cálculo da probabilidade de falha, sendo que para este trabalho, optou-se pelo método FORM (método de confiabilidade de primeira ordem), que consiste na construção de uma função conjunta de probabilidades e na transformação desta em uma distribuição gaussiana. Essa transformação representa um mapeamento um-a-um, que leva pontos do domínio original X ao domínio Y. Dentro do algoritmo do método, há um processo de otimização ao ser realizada a transformação entre os domínios, em que é feito o cálculo do gradiente e sua transformação entre o domínio X para o Y (BECK, 2008). Tal procedimento interno, a partir do cálculo de gradientes, mostra uma familiaridade entre o método e os procedimentos de otimização.

Portanto, será considerada a restrição de probabilidade de falha para os esforços de flexão e as deformações referentes à flecha e rotação, visando a uma melhor segurança dos resultados devido às incertezas das variáveis utilizadas nas equações, podendo levar a falhas. O reconhecimento dessas incertezas se dá com base na NBR 6118:2023, cujo item 12.4.1 estabelece coeficientes de segurança, como já mencionado, de, respectivamente, 1,4 e 1,15, no procedimento de cálculo, minorando as resistências e majorando os carregamentos. Para efeitos comparativos, a simulação será feita com e sem estes coeficientes, sendo possível estabelecer conclusões de sua influência nos resultados de otimização e na redução, como esperado, da probabilidade de falha.

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Em complemento à Tabela 1, a Tabela 2 apresenta os valores adotados para as variáveis presentes nas equações, contendo os valores que se aproximam de casos práticos no âmbito do cálculo estrutural em concreto armado

Tabela 2 – Valores adotados para as constantes

Variável	Descrição	Valor	Unidade
L	Vão da viga	5	m
q	Carregamento distribuído	10	kN/m
fck	Resistência característica do concreto à compressão	25000	kN/m ²
fyk	Tensão de escoamento do aço	500000	kN/m ²
ρ	Massa específica do aço	7850	kg/m ³
c	Cobrimento da seção transversal	0,025	m
E	Módulo de elasticidade	30000000	kN/m ²

Fonte: Os autores, 2024.

No âmbito da probabilidade de falha, é necessário informar os dados estatísticos para o cálculo da probabilidade de falha. Foram adotados os valores exemplificados no *Joint Committee on Structural Safety* (JCCS) em sua lista de publicações disponíveis no site. Esses valores estão apresentados na Tabela 3, sendo as médias utilizadas como os valores presentes na Tabela 2. A probabilidade de falha mínima a ser atendida nas restrições referentes à confiabilidade estrutural foi de 0,01%.

Tabela 3 – Variáveis aleatórias

Variável	Unidade	Coefficiente de variação	Distribuição
fyk	kN/m ²	0.0536	Lognormal
As	m ²	0.05	Normal
h-c	m	0.0435	Normal
fck	kN/m ²	0.1833	Lognormal
q	kN	0.1	Normal

Fonte: Vrouwenvelder et al, 2012.

3.1 Caso 1: Desconsiderando os coeficientes de segurança

Realizando a otimização sem considerar os coeficientes de segurança exigidos pela norma, como já mencionado, podemos ver a comparação do custo final obtido por cada otimizador na Tabela 4. Percebe-se que, apesar da diferença pouco significativa, o otimizador SQP resultou em um menor custo e os demais métodos apresentaram custos semelhantes, sendo o *active-set* o maior.

Tabela 4 – Caso 1: Custo otimizado

Otimizador	Custo (R\$)
SQP	1.192,50
<i>Interior-point</i>	1.212,44
<i>Active-set</i>	1.217,63

Fonte: Os autores, 2024.

Em relação à convergência, podemos observar no gráfico da Figura 2 que o método SQP, além do menor custo, também convergiu mais rapidamente que os demais métodos, de

forma que o *interior-point* demandou mais que o dobro de iterações. O *active-set* apresentou convergência consideravelmente insatisfatória, aproximando-se de quase 35 iterações no total. Percebemos também elevados picos ao se aproximar da décima quinta e trigésima iterações, pico este que foi decaindo logo em seguida. Percebe-se também que após a décima quinta iteração até a trigésima, houve baixíssima variação entre os resultados, mas sem o encerramento do processo, o que levou a um custo computacional desnecessário, finalizando no maior custo entre os três métodos, conforme apresentado.

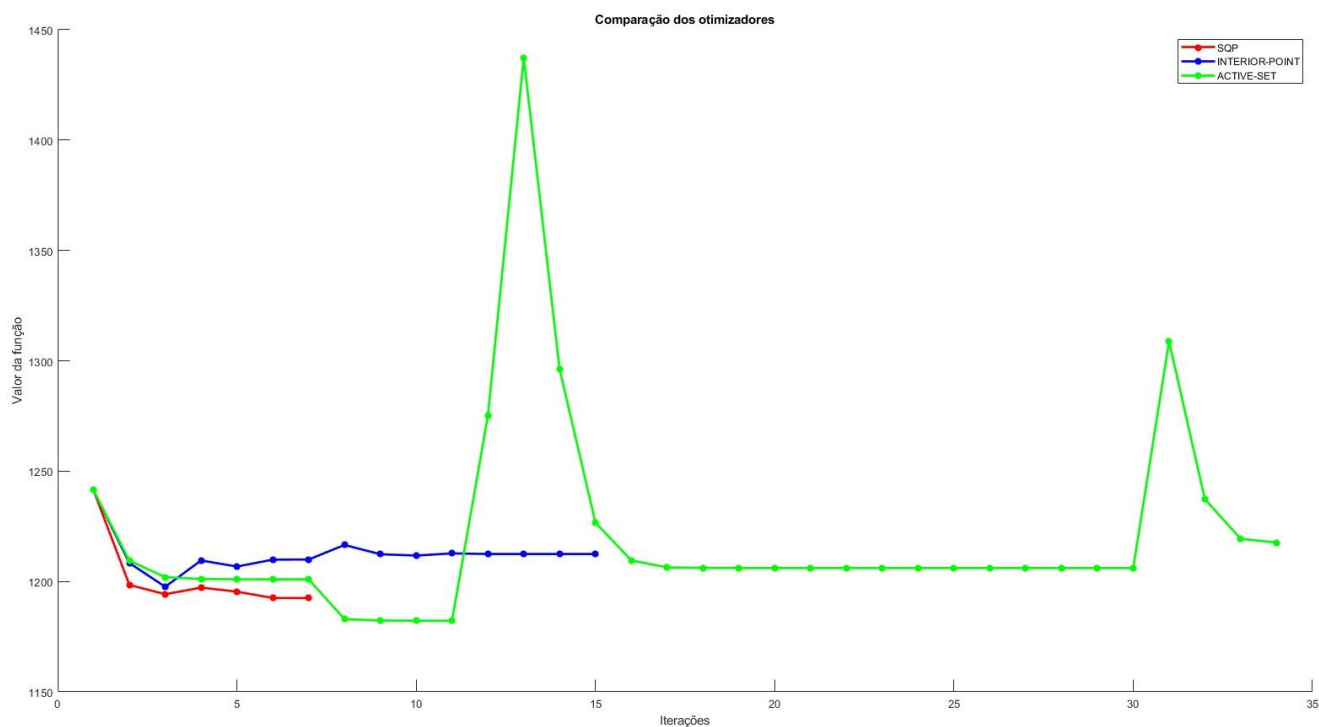
Na Tabela 5 estão apresentados os resultados das variáveis de otimização, descritas na Figura 1, para cada otimizador. Nota-se que a seção transversal resultante do método SQP apresentou, apesar dos menores custos, uma maior área na seção transversal, entretanto, uma área de aço reduzida em relação aos demais métodos, o que contribuiu para o menor custo. O *active-set* resultou na base mínima atribuída entre as restrições, entretanto, acabou compensando na altura, tendo a maior dimensão. O *interior-point* acabou resultando na maior área de aço, ainda que tenha sido finalizado com o segundo menor custo.

Tabela 5 – Caso 1: Resultado das variáveis de projeto

Otimizador	Largura (x1) [cm]	Altura (x2) [cm]	Área de aço (x3) [cm ²]
SQP	13,69	49	2,06
<i>Interior-point</i>	13,23	50,3	2,17
<i>Active-set</i>	12	52,21	2,11

Fonte: Os autores, 2024.

Figura 2 – Caso 1: Comparação da convergência



Fonte: Os autores, 2024.

Em termos de execução, as dimensões apresentadas não são adequadas, portanto, a Tabela 6 apresenta os resultados de maneira mais próxima da realidade prática, com arredondamento das dimensões da seção transversal e a quantidade de barras de aço e seu diâmetro. Com essa organização, vemos que as armaduras acabam se igualando entre os métodos, de forma que duas barras com 12.5 mm de diâmetro resultam em uma área de aço de 2,44 cm², sendo mais vantajoso, no tocante à execução, em relação ao uso de três barras de 10 mm, com uma área de aço de 2,36 cm².

Tabela 6 – Caso 1: Variáveis em termos de execução

Otimizador	Largura (x1) [cm]	Altura (x2) [cm]	Armadura
SQP	14	49	2φ12.5
<i>Interior-point</i>	14	51	2φ12.5
<i>Active-set</i>	12	53	2φ12.5

Fonte: Os autores, 2024.

3.2 Caso 2: Considerando os coeficientes de segurança

Adicionando os coeficientes de segurança exigidos pela ABNT NBR 6118:2023, já comentados, podemos observar o resultado do custo otimizado na Tabela 7, assim como o aumento de custo em relação ao caso 1. Vemos que, novamente, o otimizador SQP resultou no menor custo e ao menor aumento em relação ao caso sem os coeficientes de segurança, assim como o *active-set* resultou no maior custo e na maior diferença. A elevação dos custos já era esperada, visto que os coeficientes de segurança são aplicados na majoração dos carregamentos e na minoração das tensões resistivas, logo demandando maiores custos para atender as restrições.

Tabela 7 – Caso 2: Custo otimizado

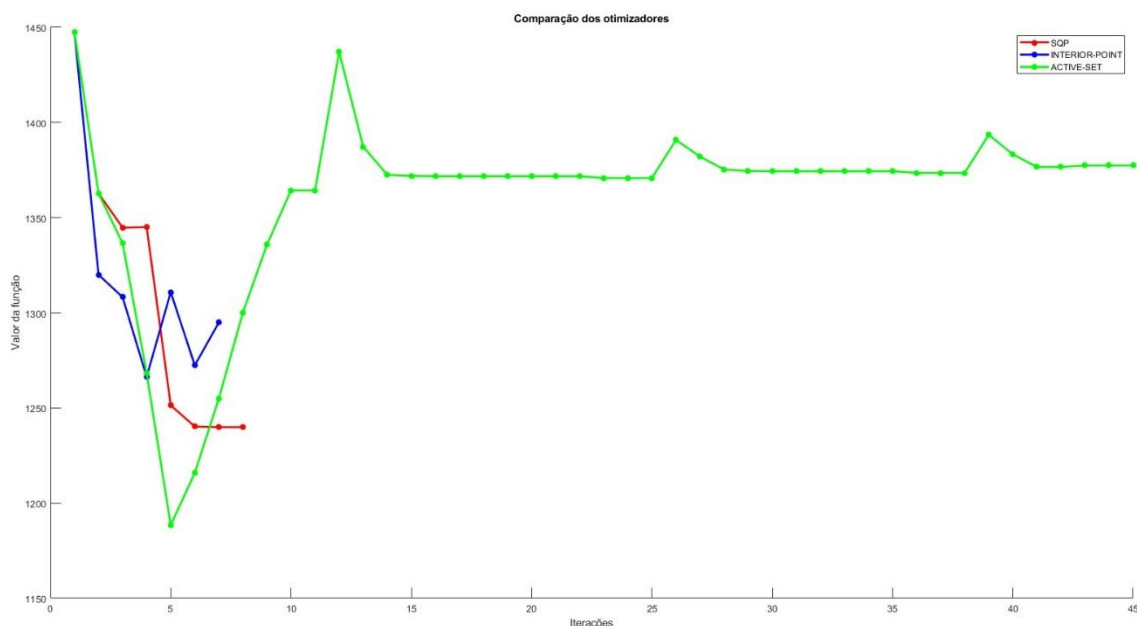
Otimizador	Custo (R\$)	Aumento em relação ao caso 1 (R\$)
SQP	1.239,91	47,41
<i>Interior-point</i>	1.294,89	82,45
<i>Active-set</i>	1.362,72	145,09

Fonte: Os autores, 2024.

Comparando a convergência dos otimizadores (Figura 3), vemos que o método *active-set* permaneceu com um elevado custo computacional sem uma variação no valor da função que justificasse a elevada quantidade de iterações. O diferencial ocorreu em relação aos demais métodos, em que, dessa vez, o método *interior-point* demandou uma iteração a menos em relação ao SQP, apesar de o custo ter sido superior.

No resultado das variáveis de projeto (Tabela 8), nota-se que, como já concluído a partir dos custos, a seção transversal aumentou em relação ao caso 1 e à área de aço em cerca de 1 cm². Observam-se, novamente, os resultados mais robustos entregues pelo *active-set*, ainda que a espessura da seção transversal, novamente, tenha resultado no mínimo estabelecido nas restrições.

Figura 3 – Caso 2: Comparação da convergência



Fonte: Os autores, 2024

Tabela 8 – Caso 2: Resultado das variáveis de projeto

Otimizador	Largura (x1) [cm]	Altura (x2) [cm]	Área de aço (x3) [cm ²]
SQP	16,83	44,72	3,41
Interior-point	12,96	51,64	3,5
Active-set	12	55,14	3,99

Fonte: Os autores, 2024

Em relação à execução (Tabela 2), percebe-se a necessidade, mantendo fixado o uso de apenas duas barras, do uso do diâmetro de 16 mm, diferentemente do diâmetro de 12,5 mm utilizado no caso 1. Vale destacar que caso se optasse por utilizar três barras de 12,5 mm (3,66 cm²), os resultados dos otimizadores SQP e *interior-point* seriam atendidos, mas não aquele do *active-set*, que entregou resultados mais robustos em relação ao caso anterior.

Tabela 9 – Caso 2: Variáveis em termos de execução

Otimizador	Largura (x1) [cm]	Altura (x2) [cm]	Armadura
SQP	17	45	2φ16
Interior-point	13	52	2φ16
Active-set	12	56	2φ16

Fonte: Os autores, 2024

Como já explicado, os coeficientes de segurança são exigidos para garantir uma maior confiança nos projetos de engenharia, sendo obtidos a partir dos conceitos de confiabilidade estrutural. Realizando um comparativo da probabilidade de falha, calculada pelo método FORM, máxima obtida pelos resultados de cada otimizador em ambos os casos (Tabela 10), nota-se que a adição dos coeficientes reduz consideravelmente a probabilidade de falha, inclusive do método sqp, que foi o mais econômico. A elevada diferença dos resultados do método *active-set* demonstra um superdimensionamento do método, de forma que a probabilidade de falha

mínima a ser atendida era da ordem de 10^{-4} e os coeficientes levaram o método a resultados na ordem de 10^{-11} .

Tabela 10 – Caso 2: Impacto dos coeficientes na probabilidade de falha

Otimizador	Probabilidade de falha – Caso 1	Probabilidade de falha – Caso 2
SQP	$9,60 \times 10^{-4}$	$1,28 \times 10^{-5}$
<i>Interior-point</i>	$9,23 \times 10^{-5}$	$2,52 \times 10^{-6}$
<i>Active-set</i>	$6,35 \times 10^{-5}$	$6,98 \times 10^{-11}$

Fonte: Os autores, 2024

4 CONCLUSÕES

A partir dos resultados obtidos, conclui-se que:

- Os métodos de otimização apresentaram boa viabilidade prática na busca por redução de custos no problema de flexão simples de vigas de concreto armado, discutido neste trabalho;
- A incorporação da probabilidade de falha leva a resultados que possibilitam uma melhor análise por parte do projetista estrutural, já que considera variabilidade por meio dos parâmetros;
- O método SQP apresentou melhores resultados, do ponto de vista tanto da redução de custo quanto de convergência;
- O método *active-set* resultou em maiores custos e convergência bastante problemática, demandando maior tempo computacional sem viabilidade e
- A incorporação de coeficientes de segurança, exigidos pela ABNT NBR 6118:2023, levam a consideráveis reduções de probabilidade de falha, garantindo melhor confiabilidade.

REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto. Rio de Janeiro: Abnt, 2023.

BASTOS, Paulo Sérgio. **FLEXÃO NORMA SIMPLES - VIGAS**. São Paulo: Unesp, 2021. Disponível em: <https://www.feb.unesp.br/pbastos/concreto2/FlexaoSimples.pdf>. Acesso em: 27 maio. 2024.

BECK, Andre T.. **Curso de Confiabilidade Estrutural**. São Carlos: Departamento de Engenharia de Estruturas, 2008.

BEER, Ferdinand P.; JOHNSTON JR., E. Russell; DEWOLF, John T.; MAZUREK, David F. **Resistência dos materiais**. 7. ed. Porto Alegre: AMGH, 2015.

CAIXA ECONÔMICA FEDERAL. Tabela de custos SINAPI (março – Pernambuco). Brasília, DF: Caixa Econômica Federal, 2024. Disponível em: https://www.caixa.gov.br/site/Paginas/downloads.aspx#categoria_653. Acesso em: 27 maio. 2024

Fmincon Find minimum of constrained nonlinear multivariable function. Solve linear, quadratic, conic, integer, and nonlinear optimization problems. Disponível em: <https://www.mathworks.com/help/optim/ug/fmincon.html>. Acesso em: 27 maio 2024

HIBBELER, R. C. **Resistência dos materiais**. 7. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

HOROWITZ, Bernardo; AFONSO, Silvana Maria Bastos; MENDONÇA, Carlos Victor Paiva de. Surrogate based optimal waterflooding management. **Journal Of Petroleum Science And Engineering**, [S.L.], v. 112, p. 206-219, dez. 2013. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.petrol.2013.11.006>

MOTTA, Renato de S.; AFONSO, Silvana M. B.. An efficient procedure for structural reliability-based robust design optimization. **Structural And Multidisciplinary Optimization**, [S.L.], v. 54, n. 3, p. 511-530, 9 mar. 2016. Springer Science and Business Media LLC. <http://dx.doi.org/10.1007/s00158-016-1418-1>.

MOTTA, Renato de S.; LEAL, Caroline F.; FERREIRA, Adriano D.; AFONSO, Silvana M.B.; LYRA, Paulo R.M.; WILLMERSDORF, Ramiro B.. Reliability analysis of ovalized deep-water pipelines with corrosion defects. **Marine Structures**, [S.L.], v. 77, p. 102969, maio 2021. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.marstruc.2021.102969>.

OPTIMIZATION Toolbox: Solve linear, quadratic, conic, integer, and nonlinear optimization problems. Solve linear, quadratic, conic, integer, and nonlinear optimization problems. Disponível em: <https://www.mathworks.com/products/optimization.html>. Acesso em: 27 maio 2024